VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

APRENDIENDO A PLANTEAR NUEVOS PROBLEMAS. UNA EXPERIENCIA CON GEOGEBRA

LEARNING TO POSE NEW PROBLEMS. AN EXPERIENCE WITH GEOGEBRA

Miguel Cruz Ramírez
Universidad de Holguín (Cuba)
cruzramirezmiguel@gmail.com

Resumen
En el presente trabajo se sigue un enfoque cualitativo y heurístico, dirigido a describir el proceso de planteo de problemas como parte del pensamiento matemático. Se toma como base un modelo teórico compuesto por seis etapas cognitivas que favorecen la formulación de nuevos problemas: selección, clasificación, asociación, búsqueda, verbalización, y transformación (proceso SCABV+T). A partir de aquí, se describe una experiencia en la formación de estudiantes para profesor, los cuales logran plantear varios problemas a partir de un problema geométrico dado. El principio heurístico de movilidad se relaciona directamente con las transformaciones del objeto geométrico, y para ello el proceso cognitivo se dinamiza con ayuda del software GeoGebra. La experiencia revela que el seguimiento de etapas cognitivas, en un ambiente de geometría dinámica mediado por la reflexión heurística, favorece el planteo de nuevos problemas. Todo ello se revierte en el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos.

Palabras clave: resolución de problemas, pensamiento matemático, geogebra, estrategias heurísticas

Abstract
In the present work a qualitative and heuristic approach is followed, aimed at describing the process of problem posing as part of mathematical thinking. It is based on a theoretical model, composed of six cognitive stages that encourage the formulation of new problems: election, classification, association, search, verbalization, and transformation (ECASV+T process). From here, an experience in the formation of prospective teachers is described, which is focused to pose several questions from a given geometrical problem. The heuristic principle of mobility is unswervingly related to the transformations of the geometric object and, in connectedness, the cognitive process is dynamized with the help of GeoGebra software. Experience shows that the monitoring of cognitive stages, in an environment of dynamic geometry mediated by heuristic reflection, favors the formulation of new problems. All this allow the development of students' mathematical thinking.

Key words: problem solving, mathematical thinking, geogebra, heuristic strategies

Introducción

El planteo de nuevos problemas constituye parte indisoluble de la historia de las matemáticas. Como ejemplo de ello, es célebre el enunciado de 23 problemas compilados por Hilbert, los cuales influyeron notablemente en el desarrollo de las matemáticas durante el siglo XX. Por este motivo Halmos expresó en el epílogo de un sugestivo artículo su convencimiento de que "[…] los problemas son el corazón de las matemáticas" (Halmos, 1982, p. 524). Muchos ejemplos dan testimonio acerca del vínculo estrecho que existe entre los componentes de las matemáticas y ciertos problemas asociados. Por ejemplo, Hamilton introdujo el concepto de cuaternión en su afán por resolver el problema de extender los números complejos a un número mayor de dimensiones (Hamilton, 1844). El teorema de Fermat-Wiles está vinculado al problema de probar la inexistencia de soluciones enteras de la ecuación de Fermat para grado superior al segundo, inamovible por el término de tres siglos (Wiles, 1995). El método de las sumas trigonométricas de Vinográdov fue desarrollado para resolver problemas clásicos formulados por Waring y Goldbach en forma de conjeturas (Vinográdov, 1947). Asimismo, el origen de la teoría de Galois estuvo motivado por el problema de encontrar una fórmula para resolver ecuaciones polinómicas de grado superior al cuarto (obra póstuma publicada por Liouville, 1846).

De modo similar a la importancia que se le concede a la resolución de problemas, muchos currículos y personalidades destacadas de la enseñanza de las matemáticas han propugnado el planteo de problemas en el contexto escolar. Polya, por ejemplo, señala que:

La experiencia de un alumno en matemáticas será incompleta mientras no tenga ocasión de resolver problemas que *él mismo haya inventado*. Enseñando a los alumnos el modo de derivar un nuevo problema de un problema ya resuelto, el profesor logrará suscitar la curiosidad de sus alumnos (Polya, 1981, p. 173; las itálicas en el original).

Halmos incluso sugiere que, "[…] del mismo modo que no se debe dar al estudiante todas las respuestas, tampoco se debe formularles todas las preguntas" (Halmos, 1982, p. 524). Seguidamente reflexiona que, incluso en el nivel de investigación, no se debe dar el problema definitivo de tesis a un candidato, ya que la identificación de nuevos problemas será parte de su futuro cuando el tutor no lo estará supervisando. En esencia, identificar problemas también constituye parte de las competencias investigativas.

En el caso de los currículos, los influyentes *Principles and Standards for School Mathematics* señalan que:

[…] una meta mayor de la Matemática de la escuela media consiste en equipar a los estudiantes con conocimientos y herramientas que les permitan formular, abordar y resolver problemas más allá de aquellos que han estudiado. […] Ellos deben tener oportunidades para formular y refinar problemas, pues los que ocurren en el ambiente real no llegan puramente diseñados (NCTM, p. 335).

Razones como estas dan crédito suficiente a la necesidad de abordar el planteo de problemas desde una perspectiva científica, lo cual viene adquiriendo un interés cada vez más creciente en Latinoamérica (*vid*. Espinoza, Segovia, y Lupiáñez, 2018; Salazar, 2018). Corresponde a la educación matemática un importante papel, en el sentido de sistematizar buenas prácticas y también de ahondar en las bases teóricas que sirven de fundamento a la enseñanza y el aprendizaje del planteo de problemas en el contexto escolar. En el presente trabajo se presenta una experiencia de clase, basada en la aplicación del software dinámico GeoGebra, con lo cual se favorece el planteo de nuevos problemas y, consecuentemente, el desarrollo del pensamiento y de la creatividad. Los fundamentos que sirven de plataforma teórica se presentan a continuación.

Marco teórico

Si bien las investigaciones asociadas al planteo de problemas matemáticos no son tan numerosas como otros campos de la educación matemática, tampoco puede decirse que son demasiado escasas. Tres argumentos pueden resultar ilustrativos. Primero: la existencia de obras clásicas como el libro *The Art of Problem Posing* (Brown y Walter, 2005), publicado por primera vez en 1983 y con más de mil citaciones en *Google Scholar*. Si bien no constituye un informe de investigación, sí marca un espíritu renovador en el quehacer didáctico, algo similar al legado del *How to Solve It* de Polya en el campo de la resolución de problemas. Esta obra sistematiza una importante perspectiva para el planteo de nuevos problemas, consistente en aceptar/poner en duda (*Accepting*/*Challenging*), provista de una poderosa herramienta: la estrategia ¿qué-si-no? (*what-if-not?*). Se trata de una expresión didáctica donde confluyen numerosas fuentes tales como la visión falibilista de las matemáticas, la puesta en duda del racionalismo cartesiano, la educación matemática crítica, el equilibrio/desequilibrio piagetiano, entre disímiles aspectos filosóficos, psicológicos, y didácticos.

Un segundo argumento proviene del desarrollo de investigaciones avanzadas, muchas de ellas basadas en diseños experimentales y también en enfoques cualitativos y mixtos. Por ejemplo, Silver dirigió un experimento clásico (*vid*. Silver, Mamona-Downs, Leung, y Kenney, 1996), consistente en presentar a 58 profesores de educación media y a 28 estudiantes para profesor, una situación relacionada con un juego de billar, donde la mesa es un tablero de dimensión $m \times n$. En un esquema discreto, los sujetos son invitados a reflexionar acerca de nuevos problemas que podrían ocurrir modificando las dimensiones del tablero. Seguidamente, se pide que cada individuo resuelva uno de los problemas propuestos para que así, nuevamente, imagine otros problemas más. Incluso investigaciones recientes han utilizado modificaciones de esta situación (*cf*. Kontorovich, Koichu, Leikin, y Berman, 2012; Daher y Anabousy, 2018). En realidad, poco se ha avanzado con relación al diseño de tareas y situaciones que resulten útiles para evaluar el planteo de nuevos problemas.

Un tercer argumento consiste en la existencia de compilaciones, lo cual demuestra cierto grado de actividad científica, con la formación y desarrollo de colegios invisibles encabezados por líderes científicos. Entre las compilaciones más recientes se encuentran *Mathematical Problem Posing. From Research to Effective Practice* (Singer, Ellerton, y Cai, 2015) con 26 artículos redactados por 52 autores de 16 países. Otro ejemplo se titula *Posing and Solving Mathematical Problems. Advances and New Perspectives* (Felmer, Pehkonen, y Kilpatrick, 2016), obra que reafirma una tesis defendida por muchos investigadores, consistente en que existe un vínculo estrecho entre los procesos de planteo y resolución de problemas (Kilpatrick, 1987; Silver, 1994; English, 1998; Xie y Masingila, 2017).

Los estudios realizados convergen o divergen es aspectos diversos. Por ejemplo, si bien se reconoce el vínculo entre planteo y resolución de problemas, poco se sabe acerca de la naturaleza y el modo en que esto tiene lugar (Nápoles y Cruz, 2000). He aquí un ejemplo descrito en una investigación anterior. A un estudiante se le pregunta por qué escoge un triángulo de entre un grupo de objetos matemáticos para formular un nuevo problema, ante lo cual responde que —“[…] en las figuras geométricas es donde más problemas se pueden encontrar” (Cruz, 2002, p. 88). Esta preconcepción muchas veces escapa de los instrumentos de evaluación y se arraiga desfavorablemente en el estudiante. Sirve este ejemplo de evidencia acerca de la manifestación de creencias y concepciones en el planteo de problemas, de modo similar a numerosos fenómenos descritos en el campo de la resolución de problemas.

Otro asunto complejo reside en la precisión de qué es lo que realmente se entiende por “planteo de problemas”. Para comenzar, existen varias terminologías en lengua inglesa: *problem posing* (Brown y Walter, 2005), *problem construction* (Bernardo, 2001), *problem creation* (Engel, 1987), *problem formulating* (Kilpatrick, 1987), *problem generation* (Kapur, 2017), *problem finding* (Dillon, 1982), entre otras. Algunas diferencias pueden explicarse desde la psicología, conforme a una observación de Dillon (1982) quien distingue el reconocimiento, el descubrimiento y la invención, en un sentido creciente de los niveles de complejidad, y que pasan por la percepción de lo evidente, lo implícito y lo incipiente, respectivamente. Para el campo de la educación matemática, Silver (1994) sugiere que el planteo de problemas comprende tanto la formulación de nuevos problemas como la re-formulación de problemas dados. Además, señala que ello puede ocurrir antes, durante, o al final de la solución de un problema. Esta concepción se ajusta al enfoque seguido por Polya (1981) y ha sido asumido por numerosos autores, ya que mira más allá del resultado y lo conceptualiza bajo un enfoque proceso-producto. Es decir, plantear problemas no consiste en hacer preguntas, sino que estas son el resultado de un proceso cognitivo complejo.

Sobre la base de las reflexiones anteriores, el planteo de problemas comprende etapas que es necesario investigar. Ya esta problemática fue advertida tempranamente por Dillon (1982), quien relaciona dichas etapas con niveles de desarrollo por intermedio de los procesos de reconocimiento/descubrimiento/invención. Recientemente, un estudio similar se ha erigido con base en cierta taxonomía, abordada bajo un riguroso enfoque experimental. Las etapas también responden a niveles de complejidad en el planteo de problemas, comenzando por los de comprensión, luego de traducción, seguido de los de edición, y concluyendo con los de selección que resultan los de mayor complejidad (Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi, y Sriraman, 2005). Otro camino alternativo consiste en la identificación de fases por las cuales transcurre el proceso de planteo. Brown y Walter reconocen cinco: escoger un punto de partida, listar atributos, ¿qué-si-no?, realizar preguntas, y analizar el problema (Brown y Walter, 2005, p. 64). Siguiendo esta idea, en Cruz (2002) se incorporan otras etapas y relaciones que luego se enriquecen a partir de varios estudios empíricos (*cf*. Cruz y Álvarez, 2002; Cruz, 2006; Cruz, García, Rojas, y Sigarreta, 2016).

La Figura 1 muestra un modelo mental del proceso de planteo de problemas en un sentido no trivial, o sea, bajo el supuesto de una actividad intencionada y reflexiva. La transformación no solo explica la estrategia ¿qué-si-no?, sino que también contiene otras formas de contradicción como el ¿qué-si-más? de Kaput (en comunicación personal a Kilpatrick, 1987). De forma sintética, el proceso se denominará SCABV+T y sus etapas y relaciones esenciales se abordan en Cruz *et al*. (2016).

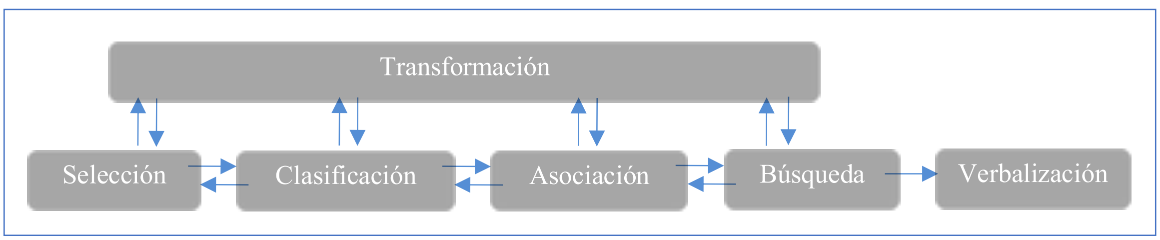

Figura 1. Un modelo del proceso cognitivo de planteo de problemas (SCABV+T)

En la literatura han sido descritas numerosas estrategias heurísticas asociadas al planteo de problemas, las cuales pueden ser explicadas con la ayuda del proceso SCABV+T. En efecto, la reformulación, la generalización, la variación de condiciones dadas (Polya, 1981; Sharygin, 1991), son formas específicas de realización del ¿qué-si-no? Por su parte, formar el producto cartesiano entre dos conceptos (Kilpatrick, 1987) se enmarca principalmente en la etapa de selección. Asimismo, la descomposición y recomposición (Polya, 1981) se originan de la dinámica asociación/búsqueda. Otros procesos tales como el empleo de analogías (Polya, 1981), encadenamiento (formular un problema que se reduzca a otro ya resuelto; Silver *et al*., 1996), la anidación ("problemas matrioska"; Sharygin, 1991), responden a subprocesos todavía más complejos dentro del esquema cognitivo SCABV+T.
Otro aspecto importante que ha ganado espacio en el campo del planteo de problemas consiste en el uso de tecnologías (Abramovich, 2014; Daher y Anabousy, 2018). En particular, los paquetes de geometría dinámica resultan útiles para potenciar el desarrollo de procesos cognitivos complejos, tales como la imaginación y el establecimiento de conjeturas (Christou, Mousoulides, Pittalis, y Pitta-Pantazi, 2005; Contreras, 2013; Lavy, y Shriki, 2010). La posibilidad de transformar el objeto matemático, en el proceso SCABV+T, se entrelaza directamente con el principio de movilidad bajo el uso de geometría dinámica. Por tanto, la implementación de paquetes como GeoGebra constituye una oportunidad para favorecer el planteo de nuevos problemas.

Metodología

Con el objetivo de profundizar en el planteo de nuevos problemas, se sigue un camino predominantemente cualitativo, basado en la argumentación y apoyado en evidencias empíricas. El modelo subyacente consiste en el proceso cognitivo SCABV+T antes referido, mientras que su ejemplificación se adapta de sesiones de planteo de nuevos problemas. Estas sesiones han sido desarrolladas con estudiantes del primer año de la carrera de Licenciatura en Educación de la especialidad Matemática, en la Universidad de Holguín (Cuba).

El planteo de problemas gira en torno al intento infructuoso de extender el teorema de las tres mediatrices de un triángulo a un cuadrilátero. Todo el análisis se realiza utilizando GeoGebra, en sesiones de análisis y discusión con pequeños grupos (de tres o cuatro estudiantes). Un estudio similar para el planteo de problemas, pero relacionado con la extensión del teorema de las tres bisectrices, ha sido desarrollado por Christou, Mousoulides, Pittalis, y Pitta-Pantazi (2005, pp. 136-140).

Resultados

La situación inicial tiene lugar justo al concluir la demostración del teorema de las tres mediatrices de un triángulo *ABC*, las cuales concurren en el circuncentro *O*. La estrategia ¿qué-si-no? resulta de la interacción entre las etapas selección/transformación. La idea original que se discute con los estudiantes consiste en buscar nuevos puntos de partida e indagar qué propiedades se conservan y qué nuevas relaciones tienen lugar. La Figura 2 muestra dos de las ideas discutidas: ¿Qué pasaría si en lugar del triángulo *ABC* se trata de un cuadrilátero convexo *ABCD*? ¿Qué pasaría si el triángulo *ABC* no es plano sino esférico?

El teorema se cumple en el segundo caso. El primer caso se adopta como punto de partida (*selección*). La etapa siguiente consiste en la *clasificación* de componentes del objeto, como el caso de los puntos de intercepción que son seis, sin excluir posibles coincidencias ni posicionamiento en el infinito como puntos impropios. Durante la etapa de *asociación*, a estos objetos se le hacen corresponder conceptos tales como lugar geométrico, alineación, concurrencia, vértices de otro cuadrilátero, entre otros. Seguidamente comienza la etapa de *búsqueda* de posibles relaciones y propiedades. Se trata del momento más complejo, donde se requiere el despliegue de un profundo razonamiento e imaginación.

Con ayuda de GeoGebra, el estudiante logra en un tiempo razonable formular algunas conjeturas. Por ejemplo: "[…] parece ser que los cuatro puntos no impropios son concurrentes cuando el cuadrilátero es un rectángulo". Sin embargo, en general, la concurrencia tiene lugar cuando el cuadrilátero seleccionado es cíclico. Es importante destacar el elevado valor heurístico de la movilidad, pues de la misma forma que sugiere una hipótesis falsa también se apronta a rechazarla, luego de examinar varias posibilidades antes de comenzar una eventual demostración de la posible propiedad descubierta.

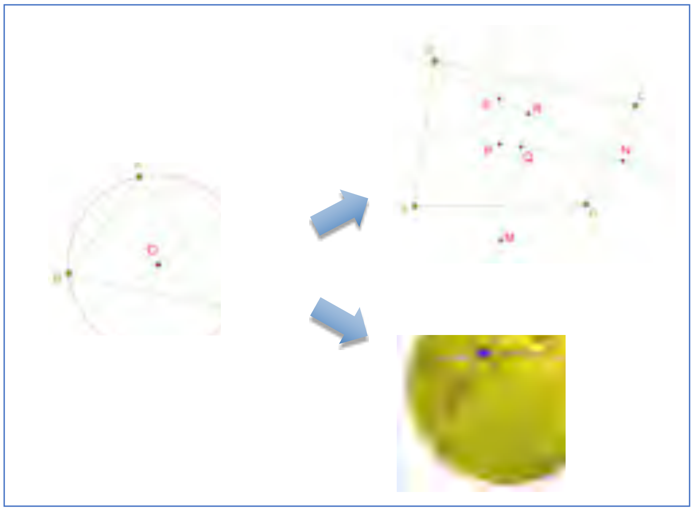

Figura 2. Dos intentos de extensión del teorema de las tres mediatrices de un triángulo

El planteo concluye con la etapa de *verbalización*. Con ello se sintetiza el proceso reflexivo en una forma rigurosa de comunicación matemática. Durante el proceso de búsqueda, la conjetura relacionada con la concurrencia de cuatro puntos puede conducir al siguiente enunciado de manera directa: ¿Bajo qué condiciones los puntos son concurrentes? (*P*, *Q*, *R* y *S* en la Figura 2). Sin embargo, cuando la búsqueda se apoya de procesos cognitivos más complejos, la reflexión puede conducir a un enunciado de orden superior en su nivel de complejidad y elaboración: Probar (o refutar) que los puntos son concurrentes sí y solo sí el cuadrilátero es cíclico.

Por este camino de razonamiento pueden salir a colación otros problemas, los cuales fueron identificados por los estudiantes: ¿Cuándo *SQ* es bisectriz del ángulo *MSN*? ¿Cuándo las rectas *PR* y *MN* son paralelas? ¿Cuándo el cuadrilátero *PQRS* es un paralelogramo? ¿Cuáles puntos del conjunto {*P*, *Q*, *R*, *S*, *M*, *N*} pueden estar alineados? ¿Bajo qué condiciones el cuadrilátero *PQRS* es cíclico? Esta última pregunta se vincula estrechamente al antiparalelismo de dos pares de rectas que se cortan: *PS* y *QR* que se cortan en *M*, respecto a *QP* y *RS* que se cortan en *N*.

Para dar continuidad a la sesión de planteo de problemas, el profesor realiza la siguiente pregunta heurística: —*¿Se podrán encontrar nuevos elementos en la figura? No necesariamente deben estar representados*. Con esta pregunta se trata de dirigir la atención hacia las amplias posibilidades de transformar el objeto, no solo al inicio sino también en las etapas subsiguientes del proceso. —*Observen que, en general, se obtiene un nuevo cuadrilátero. ¿Qué nuevos problemas se pueden encontrar?* Aquí se trata de concentrar los esfuerzos en el cuadrilátero *PQRS*. Durante el debate, uno de los estudiantes realizó la siguiente observación: —*¡Podemos repetir la idea del problema sobre el nuevo cuadrilátero!* En efecto, arribar a esta idea era uno de los objetivos de la conversación heurística, con el fin de aprovechar varios resultados asociados a la sucesión de cuadriláteros que se pueden obtener.

Un aspecto importante consiste en la naturaleza de la transformación señalada por el estudiante. La idea es un ejemplo genuino del ¿qué-si-más? de Kaput. Nuevamente, el razonamiento puede discurrir por las etapas de clasificación/asociación/búsqueda hasta llegar al planteo de nuevos problemas. Por ejemplo, realizando varias construcciones con GeoGebra, de modo que a cada nuevo cuadrilátero se le asocie otro más por intermedio de las mediatrices, el estudiante puede arribar a las siguientes conjeturas, las cuales son efectivamente válidas cuando el cuadrilátero original no es cíclico (*vid.* Radko y Tsukerman, 2012; Shephard, 1995):

- Los ángulos correspondientes de dos cuadriláteros consecutivos son suplementarios.
- El cuadrilátero original, el tercero, el quinto, y así sucesivamente todos los de índice impar en dicha sucesión son semejantes. Lo mismo ocurre con los de índice par.
- Cada sucesión anterior forma una especie de “espiral de cuadriláteros semejantes”, las cuales convergen en el mismo punto.
- El ángulo de rotación para cada espiral de semejanza es π cuando el cuadrilátero original es convexo, y 0 cuando es cóncavo.

La Figura 3 describe algunos de los caminos de razonamiento, conforme al proceso cognitivo SCABV+T. La saeta en rojo discontinuo ilustra la implementación de la estrategia ¿qué-si-más? en el marco de la transformación.

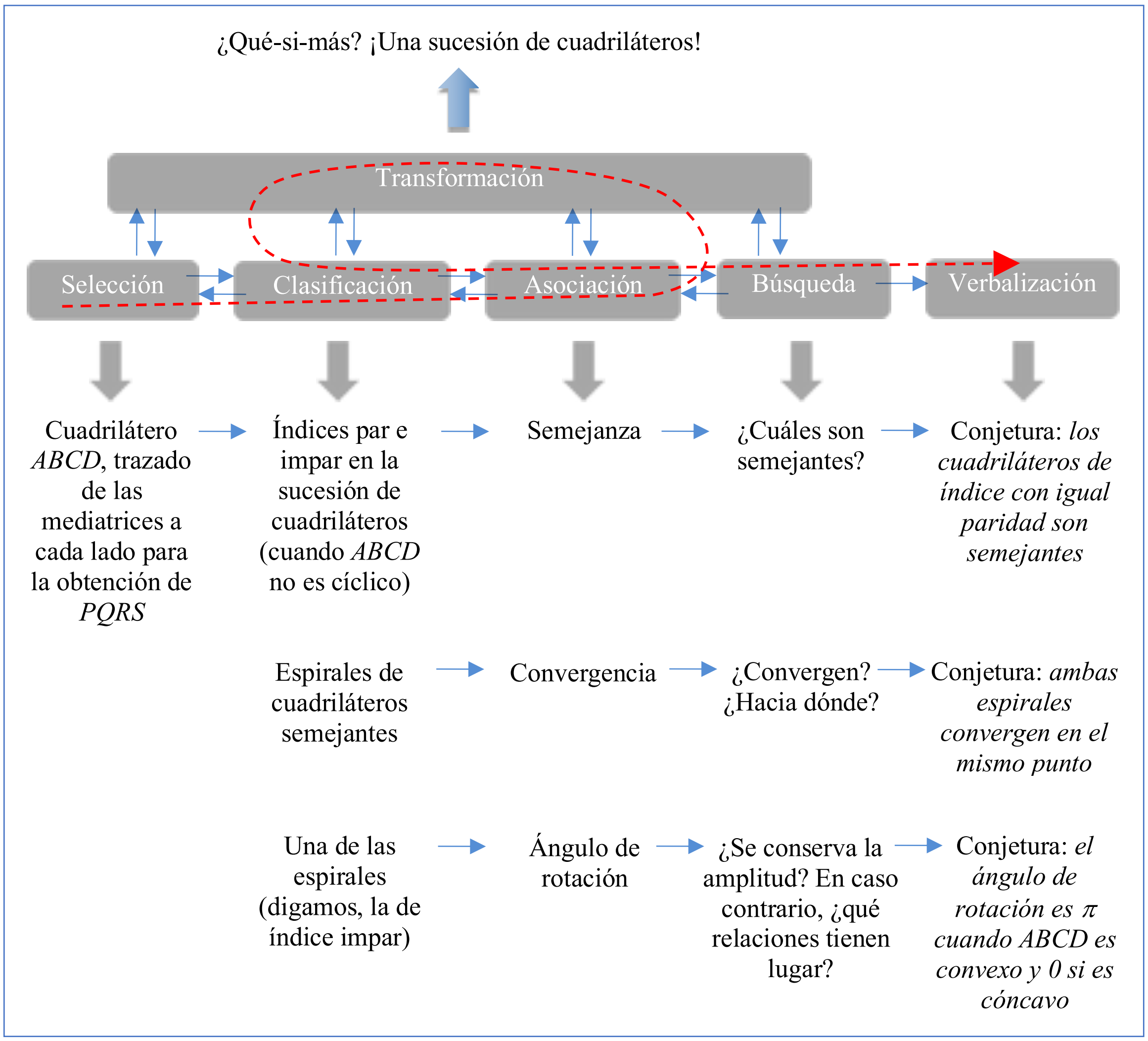

Figura 3. Nuevas conjeturas tras la implementación de la estrategia ¿qué-si-más?

Es importante resaltar la presencia de ciclos dentro del proceso cognitivo SCABV+T. Ya este hecho fue señalado por Brown y Walter (2005) y ha sido poco tratado en la literatura relacionada con el planteo de problemas. Aunque se trata de algo intuitivamente natural en el proceso de razonamiento matemático, las conexiones entre etapas no son completamente evidentes. En la experiencia didáctica aquí descrita, pueden observarse dos tipos de ciclos. En primer lugar, ciclos lineales (de tipo I) como la interacción entre las etapas de asociación/búsqueda. Ello ocurre cuando las propiedades o conceptos asociados a un componente, identificado dentro del objeto, no suscita alguna conjetura relevante para el individuo. En segundo lugar, ciclos no lineales (de tipo II) como el señalado en la Figura 3, donde la etapa de transformación enriquece el proceso de forma significativa. Las evidencias sugieren que el uso de GeoGebra contribuye a la activación de complejos mecanismos cognitivos asociados a ambos tipos de ciclos, con base en la movilidad de los objetos geométricos. Sin embargo, queda mucho por hacer en los órdenes teórico y empírico, a fin de comprender mejor la forma en que tales ciclos tienen lugar.

Conclusiones

El planteo de problemas constituye un campo emergente de la educación matemática, estrechamente ligado a los estudios sobre resolución de problemas. El presente trabajo ilustra una experiencia didáctica, en sesiones de análisis y discusión con pequeños grupos de estudiantes que se forman como futuros profesores de matemáticas. En el estudio se explora el razonamiento con base en el proceso cognitivo SCABV+T, mostrando su pertinencia por un camino predominantemente cualitativo. Con el ejemplo tratado, puede ejemplificarse la forma en que se interrelacionan las etapas, la existencia de ciclos de sendos niveles de complejidad, así como las relaciones estrechas con varias estrategias heurísticas descritas por otros autores.

El uso de GeoGebra no significa una condición necesaria para el planteo de nuevos problemas, sino un crédito favorable acerca de sus potencialidades para el desarrollo del pensamiento. Los recursos de movilidad permiten que este software de geometría dinámica se convierta en un catalizador de pensamiento creativo. Con economía de tiempo, son cuantiosas las ventajas que este paquete brinda para favorecer el planteo de nuevos problemas, principalmente por la intuición de conjeturas. En varias ocasiones, las conjeturas pueden descartarse moviendo elementos del objeto geométrico, o bien reafirmarse incluso para casos más generales (como ocurre con ciertas propiedades cuando el cuadrilátero descrito es no convexo).

Referencias bibliográficas

Abramovich, S. (2014). Revisiting mathematical problem solving and posing in the digital era: toward pedagogically sound uses of modern technology. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(7), 1034-1052. doi: 10.1080/0020739X.2014.902134

Bernardo, A. B. I. (2001). Analogical problem construction and transfer in mathematical problem solving. *Educational Psychology*, 21(2), 137-150. doi: 10.1080/01443410020043841

Brown, S. I., & Walter, M. I. (2005). *The Art of Problem Posing*. New Jersey: Erlbaum.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *Zentralbatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, 37(3), 149-158. doi: 10.1007/s11858-005-0004-6

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. (2005). Problem solving and problem posing in a dynamic geometry environment. *The Mathematics Enthusiast*, 2(2), 125-143. https://scholarworks.umt.edu/tme/vol2/iss2/6

Contreras, J. N. (2013). Fostering mathematical creativity through problem posing and modeling using dynamic geometry: Viviani's problem in the classroom. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 4(2), 66-72. http://journals.tc-library.org/index.php/matheducation/article/view/946/591

Cruz, M. (2002). *Estrategia Metacognitiva en la Formulación de Problemas para la Enseñanza de la Matemática*. Tesis doctoral no publicada. Holguín: Instituto Superior Pedagógico "José de la Luz y Caballero".

Cruz, M., & Álvarez, S. (2002). La formulación de problemas para la enseñanza de la Matemática. *Épsilon*, 52, 17-28.

Cruz, M. (2006). A mathematical problem-formulating strategy. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. CIMT, University of Plymouth, United Kingdom. http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/default.htm

Cruz, M., García, M. M., Rojas, O. J., & Sigarreta, J. M. (2016). Analogies in mathematical problem posing. *Journal of Science Education*, 17(2), 84-90. http://www.accefyn.org.co/rec

Daher, W., & Anabousy, A. (2018). Creativity of pre-service teachers in problem posing. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(7), 2929-2945. doi: 10.29333/ejmste/90994

Dillon, J. T. (1982). Problem finding and solving. *The Journal of Creative Behavior*, 16(2), 97-111. doi: 10.1002/j.2162-6057.1982.tb00326.x

Engel, A. (1987). The creation of mathematical Olympiad problems. *World Federation of National Mathematics Competition Newsletter*, 5, 18-28. www.wfnm.org/journal.html

English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 83-106. doi: 10.2307/749719

Espinoza, J., Segovia, I., & Lupiáñez, J. L. (2018). Variables de estudio para caracterizar las producciones de estudiantes con talento matemático ante tareas de invención de problemas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 31(2), 1132-1138. http://clame.org.mx/uploads/actas/ALME31_No.2.pdf

Felmer, P., Pehkonen, E., & Kilpatrick, J. (2016, Eds.). *Posing and Solving Mathematical Problems. Advances and New Perspectives*. Switzerland: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-28023-3

Halmos, P. R. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 87(7), 519-524. doi: 10.2307/2321415

Hamilton, W. R. (1844). On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 29(192), 113-122. doi: 10.1080/14786444608645590

Kapur, M. (2017). Examining the preparatory effects of problem generation and solution generation on learning from instruction. *Instructional Science*, 46(1), 133-153. doi: 10.1007/s11251-017-9435-z

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R., & Berman, A. (2012). An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups. *Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 149-161. doi: 10.1016/j.jmathb.2011.11.002

Lavy, I., & Shriki, A. (2010). Engaging in problem posing activities in a dynamic geometry setting and the development of prospective teachers' mathematical knowledge. *Journal of Mathematical Behavior*, 29(1), 11-24. doi: 10.1016/j.jmathb.2009.12.002

Liouville, J. (1846). Œuvres mathématiques d'Évarist Galois. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 11, 381-384.

Nápoles, J. E., & Cruz, M. (2000). La resolución de problemas en la escuela. Algunas reflexiones. *Función Continua*, 8, 21-42.

NCTM [National Council of Teachers of Mathematics] (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Polya, G. (1981). *Cómo Plantear y Resolver Problemas*. México: Trillas.

Radko, O., & Tsukerman, E. (2012). The perpendicular bisector construction, the isoptic point, and the Simson line of a quadrilateral. *Forum Geometricorum*, 12, 161-189. http://forumgeom.fau.edu/FG2012volume12/FG201214.pdf

Salazar, L. (2018). Invención de problemas en un contexto de competitividad y cooperación: una experiencia con sumas de series. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 31(1), 215-222. http://clame.org.mx/uploads/actas/ALME31_No.1.pdf

Sharygin, I. (1991). ¿De dónde vienen los problemas? (en ruso; partes 1 y 2). *Quantum*, http://kvant.mccme.ru/1991/08/otkuda_berutsya_zadachi.htm

Shephard, G. C. (1995). The perpendicular bisector construction. *Geometriae Dedicata*, 56(1), 75-84. doi: 10.1007/BF01263614

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-28. http://www.jstor.org/stable/40248099

Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S. S., & Kenney, P. A. (1996). Posing mathematical problems: an exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(3), 293-309. doi: 10.2307/749366

Singer, F. M., Ellerton, N. F., & Cai, J. (2015, Eds.). *Mathematical Problem Posing. From Research to Effective Practice*. New York: Springer. doi: 10.1007/978-1-4614-6258-3

Vinográdov, I. M. (1947). El método de las sumas trigonométricas en la teoría de los números (en ruso). *Trudy Math. Inst. Steklov*, 23, 3-109.

Wiles, A. (1995). Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem. *Annals of Mathematics*, 141(3), 443-551. doi: 10.2307/2118559

Xie, J., & Masingila, J. O. (2017). Examining interactions between problem posing and problem solving with prospective primary teachers: a case of using fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 101-118. doi: 10.1007/s10649-017-9760-9